

K. Rasmussen

Analogier

mellem

Mekaniske, Akustiske og
Elektriske Systemer



K. Rasmussen

Analogier

mellem

**Mekaniske, Akustiske og
Elektriske Systemer**

Analogier

mellem mekaniske, akustiske og elektriske systemer

© 1994 by K. Rasmussen and Polyteknisk Forlag

1. udgave	1. oplag 1973
2. udgave	1. oplag 1977
3. udgave	1. oplag 1982
3. udgave	2. oplag 1986
4. udgave	1. oplag 1994

Kopiering fra denne bog er kun tilladt i overensstemmelse med
overenskomst mellem Undervisningsministeriet og Copy-Dan

Bogen er trykt i offset hos AiO Tryk as, Odense

Printed in Denmark 1994

ISBN 87-502-0762-8



Anker Engelundsvej 1
2800 Lyngby
Tlf. 42 88 14 88
Fax 42 88 11 67

INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side
Indholdsfortegnelse	i
Symbolliste	ii
Introduktion	iii
1 Passive koblingselementer i de forskellige systemer	1
1.1 Elektriske systemer	1
1.2 Mekaniske systemer i translatorisk bevægelse	5
1.3 Mekaniske systemer i roterende bevægelse	10
1.4 Akustiske systemer	13
2 Impedansbegreberne i de forskellige systemer	20
3 Principper og love i de forskellige systemer	24
4 Analogi I. Impedansanalogi	34
4.1 Mekaniske systemer i translatorisk bevægelse	34
4.2 Mekaniske systemer i roterende bevægelse	43
4.3 Blandede mekaniske systemer	48
4.4 Akustiske systemer	58
4.5 Blandede mekaniske og akustiske systemer	64
4.6 Transmissionsledningen i de forskellige systemer	66
5 Analogi II. Admittansanalogi	72
5.1 Mekaniske systemer	73
5.2 Akustiske systemer	84
6 Sammenkobling af analogi I og analogi II	87
7 Skematisk oversigt over analogi I og analogi II	92
Litteraturliste	95

SYMBOLLISTE

B	Induktion	a	Radius
C	Kapacitans	b	Længde
E	Elasticitetsmodul	c	Lydhastighed
F	Kraft	c_a	Akustisk eftergivenhed
G	Konduktans	c_m	Mekanisk eftergivenhed
I	Strøm	c_t	Torsionseftergivenhed
J	Inertimoment	f	Frekvens
L	Induktans	l	Længde
P	Effekt	m_a	Akustisk masse
P_e	Elektrisk effekt	m_m	Mekanisk masse
P_a	Akustisk effekt	n	Omsætningsforhold
P_m	Mekanisk effekt	p	Lydtryk
Q	Ladning	p_s	Statisk tryk
R	Resistans	q	Volumenhastighed
S	Areal	r	Afstandskoordinat
T	Torsionsmoment	r_a	Akustisk resistans
U	Spænding	r_m	Mekanisk resistans
V	Volumen	r_t	Rotationsresistans
Y	Admittans	t	Tidskoordinat
Z	Impedans	u	Partikelhastighed
Z_e	Elektrisk impedans	v	Hastighed
Z_a	Akustisk impedans	x	Stedkoordinat
Z_m	Mekanisk impedans		
γ	$= c_p / c_v$		
η	Viskositet		
ω	Vinkelfrekvens, vinkelhastighed		
ρ	Densitet		
θ	Vinkelforskydning		

ANALOGIER

mellem mekaniske, akustiske og elektriske systemer

En ingeniørs opgave er bl.a., ud fra sin tekniske viden, at konstruere og opbygge komplicerede systemer eller enkeltdele, der kan opfylde forudstillede krav. For at kunne løse den specifikke opgave tilfredsstillende, foretages beregninger i de tilfælde hvor den nødvendige teori er tilstrækkeligt udviklet og erfaringsmæssigt gælder. I modsat fald suppleres teorien med forsøg. Disse forsøg kan enten være fuldskalaforsøg på vitale dele af konstruktionen eller modelforsøg. Modelforsøg kan foretages på to måder. Man kan opbygge en geometrisk ligedannet skalamodel i det samme fysiske system som den egentlige konstruktion, f.eks. skibsmodeller i skala 1:30 eller modeller af teater- og koncertsale i skala 1:8. Målinger på modellen kan derpå overføres til den egentlige konstruktion under forudsætning af at en række parametre samt randværdi- og begyndelsesværdibetingelser er kendte. En model kan imidlertid også opbygges i et andet fysisk system end svarende til den egentlige konstruktion, og man taler da om en analogi mellem de to konstruktioner. Opstillingen af sådanne analogier er især formålstjenlig, når opbygningen af model og målinger på denne er hurtigere og billigere i et andet fysisk system end det egentlig betragtede. Eksempelvis er det væsentlig nemmere at samle nogle elektriske komponenter og måle på det resulterende netværk fremfor at opbygge en model i stål og måle på denne.

Forudsætningen for at kunne benytte denne fremgangsmåde ved problemløsninger er, at det egentlige problem og dets analogi kan beskrives ved identiske matematiske udtryk i de to systemer. Idag, hvor teorien for elektriske kredsløb befinder sig på et højt udviklet stade, og hvor beregninger på disse kredsløb ofte foretages med standard programmel som fx. PSpice, ANP2 etc på almindelige PC'ere, er det naturligt at søge problemer fra andre systemer løst ved opstilling af en analog elektrisk model. Formålet med denne bog er at beskrive systematiske fremgangsmåder ved opstilling af analogierne mellem mekaniske, akustiske og blandede mekaniske, akustiske og elektriske systemer. Tilsvarende forhold gør sig gældende for andre systemer, som f.eks. hydrauliske og pneumatiske systemer, magnetiske kredse, termiske og økonomiske systemer samt en række fænomener indenfor fysiologi og farmakologi. Især for hydrauliske og pneumatiske systemer er ligheden med akustiske systemer så stor, at principperne omtalt i denne bog umiddelbart kan overføres til disse systemer.

Opstillingen af analogier er ikke nogen ny opdagelse. I elektroteknikkens barndom var det almindeligt at forklare de observerede fænomener ved sammenligning med mekaniske systemer, hvis opførsel man var fortrolig med. Således skyldes betegnelsen elektro-motorisk kraft (EMK) en direkte analogislutning til mekanisk, dvs. motorisk kraft. Det ældste eksempel på anvendelsen af mekanisk-elektriske analogier inden for elektroteknikken synes at være opfindelsen af Pupinledningen, idet det siges, at M. Pupin gjorde sin opfindelse i 1899 ud fra forsøg med udbredelsen af bølger på et tov (dvs. en spændt streng). Når der til tovet blev fastgjort nogle kugler med ækvidistant afstand, var dæmpningen af bølgeudbredelsen hen langs tovet mærkbart mindre end for tovet uden kugler. Ved analogislutninger indså Pupin, at kuglernes tilstedeværelse på tovet svarede til, at der i ledningen blev indskudt selvinduktioner med ækvidistant afstand, hvorved ledningens overføringskarakteristik forbedredes væsentligt. Den kinetiske energi i de svingende kugler er ækvivalent med den oplagrede elektromagnetiske energi i en selvinduktion. Pupinledninger spillede tidligere en stor rolle ved transmission over store afstande (over 100 km) via telefon eller telegraf før der blev installeret forstærkerkredsløb. Baggrunden for at kunne opstille analogier mellem forskellige systemer er at svingninger i de omtalte systemer er af fundamentalt samme natur. Kinetisk energi er i mekaniske og akustiske systemer forbundet med masser eller luftmængder i bevægelse og svarer i elektriske netværk til elektromagnetisk energi i en selvinduktion hidrørende fra elektriske ladninger i bevægelse. Potentiel energi er tilsvarende forbundet med spændte fjedre, oplagret luft (trykluft) og opladede kondensatorer. Newton's love og Kirchhoff's love er alle afledt af de generelle principper for ligevægt og kontinuitet, osv.. Imidlertid har de matematiske udtryk for kinetisk og potentiel energi samme karakter og dette forhold medfører, at det fx. er muligt at opstille to forskellige analoge elektriske modeller af en konstruktion i et andet fysisk system. Disse to analogier benævnes her henholdsvis impedans- og admittansanalogien.

Impedansanalogien er karakteriseret ved at kinetisk energi i det betragtede fysiske system svarer til kinetisk, dvs. elektromagnetisk energi i det analoge elektriske netværk. Konsekvensen heraf er bl.a. at impedanser i det elektriske netværk svarer til impedanser i det betragtede fysiske system, hvilket netop er årsagen til betegnelsen "impedansanalogi"

Admittansanalogien er omvendt karakteriseret ved at kinetisk energi i det betragtede fysiske system svarer til potentiel, dvs. elektrostatisk energi i det analoge elektriske netværk. Dette medfører tilsvarende at impedanser i det elektriske netværk nu svarer til admittanser i det betragtede fysiske system, hvoraf betegnelsen "admittansanalogi"

Der kan altså opstilles to forskellige analoge elektriske netværk, der begge er en model af samme konstruktion i et andet fysisk system. De to netværk er derfor ikke indbyrdes uafhængige, og det viser sig da også, at de er hinandens duale netværk.

For at lette tilegnelsen af stoffet er der i de første afsnit givet en kort gennemgang af de elementære kredsløbselementer indenfor elektroteknik, mekanik og akustik m.v. Indholdet vil nok være kendt for de fleste, men for at blive fortrolig med den anvendte terminologi må det dog anbefales at løbe afsnittene igennem. Der er så vidt muligt overalt benyttet danske og internationalt vedtagne enheder, symboler og konventioner, hvor sådanne findes.[†]

De efterfølgende afsnit indeholder en gennemgang af de to analogier - impedans- og admittansanalogierne - samt deres sammenkobling. Det anvendte antal sider til gennemgangen af admittansanalogien er væsentlig mindre end for impedansanalogien, hvilket absolut ikke må tages som udtryk for, at denne analogi er af mindre betydning. Årsagen er, at det er de samme eksempler, der anvendes i de to tilfælde og at beskrivelsen af eksemplerne derfor er udeladt i det sidste tilfælde. Da det ofte volder vanskeligheder, især i begyndelsen, at undgå sammenblanding af de to analogier, er det vigtigt at man ved opstillingen af de analoge elektriske netværk er yderst konsekvent med hensyn til de bogstavsymboler eller talværdier man tillægger de enkelte komponenter. Når man derfor tegner et elektrisk netværk ved anvendelse af tegnsymbolerne for resistans, induktans og kapacitans, **skal** det bogstavsymbol eller talværdi, der angives, **altid** være komponentens værdi i henholdsvis Ohm, Henry eller Farad, og **aldrig** de tilsvarende reciprokke værdier (admittanser). Har man således anvendt symbolet for en induktans (figur 1.3) er dermed også angivet, at impedansen af denne komponent er $j\omega L$ (eller sL i Laplace notation), hvor L er komponentens værdi. Der er derfor forkert at skrive værdien sL ved tegnsymbolet for slet ikke at tale om værdien L^{-1} , som det undertiden ses. Sådanne "unoder" fører uvægerligt til fejl på et eller andet tidspunkt og det må derfor kraftigt anbefales konsekvent at følge den "klassiske" terminologi for elektriske netværk.

[†] Se fx. DS 5009, 1987, Symboler på elektrotekniske tegninger
ISO 31, 1992, Quantities and units
IEC 27-1, 1992, Letter symbols to be used in electrical terminology
DS 2188, 1982, Akustik. Ordliste

Passive koblingselementer i de forskellige systemer

Ved en analytisk behandling af elektriske, mekaniske eller akustiske systemer opdeles den passive del af systemet i mindre enheder, hvis egenskaber kan udtrykkes gennem en konstant, der optræder som koefficient til de enkelte led i de differentiallyigninger, man opstiller ved analysen. Fx. optræder induktansen L som koefficient til leddet $\frac{dI}{dt}$ (eller $\frac{d^2Q}{dt^2}$) i elektriske systemer og massen m som koefficient til leddet $\frac{dv}{dt}$ (eller $\frac{d^2x}{dt^2}$) i mekaniske systemer. Ved denne fremgangsmåde opnår man at dele systemet op i et begrænset antal forskellige enheder, hvis egenskaber er veldefinerede, jf. resistans, kapacitans osv. i elektriske systemer. Man kalder disse grundenheder for koncentrerede kredsløbselementer (lumped parameters). Fra elektroteknikken er det dog kendt, at man ikke altid er i stand til at dele et system op i koncentrerede kredsløbselementer. Hvis bølglængden af et signal er sammenlignelig med længden af den transmissionsledning der bærer signalet, er det ofte ikke muligt at erstatte transmissionsledningen med den simple ækvivalente T - eller π -leder og det er mere fordelagtigt at operere med et system af distribuerede (fordelte) kredsløbselementer (distributed parameters). I de følgende afsnit skal de enkelte passive kredsløbselementer i de forskellige systemer behandles nøjere.

1.1 Elektriske systemer

De almindelige passive kredsløbselementer inden for elektroteknikken er modstand, selvinduktion, kondensator og transformer. Herudover vil også det nyttige men mindre kendte kredsløbselement, gyratoren, blive behandlet.

For en modstand er resistansen R givet ved

$$U = R I \quad (1-1)$$

hvor U er spændingsfaldet over modstanden forårsaget af strømmen I , jf. figur 1.1. Energitalbet pr. sekund, dvs. den afsatte effekt i modstanden, er givet ved