MEKANIK

Gunnar Christiansen   Erik Both
Preben Østergaard Sørensen

Polyteknisk Forlag
2018

MEKANIK

Af Gunnar Christiansen, Erik Both og Preben Østergaard Sørensen

1. udgave, 1. oplag 2018

ISBN 978-87-502-1146-4

ISBN E-bog 978-87-502-1142-6

Tryk: Eurographic Danmark

Printed in Denmark 2018

Er tidligere udgivet af institut for Fysik, Danmarks Tekniske Universitet i 2000 under ISBN 87-87669-18-8. Til denne udgave er der udarbejde et appendiks om problemløsning samt rettet småfejl i teksten.

Udgivet af:
Polyteknisk Forlag
Bygning 101
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby

Forsidefiguren stammer fra Abbé Nollet: Lecon de Physique Experimentale, 1745

Forord

Denne bog er primært skrevet til anvendelse i faget MEKANIK ved DTU. Bogens niveau og indhold er således valgt i overensstemmelse med den tradition, der er opstået omkring MEKANIK som et første- eller andetsemesterfag. Det er i bogen forudsat, at læseren har et basalt kendskab til differentialligninger og simpel vektorregning.

Mekanik er et vanskeligt fag. Ikke fordi teorien er specielt svær eller fordi matematikken er uoverskuelig, men fordi flere af de metoder, der benyttes, kan synes at stride mod intuitive fornemmelser. Det er et af denne bogs formål at udrydde nogle af de intuitive opfattelser af mekaniske foreteelser og at skabe tillid til, at mekaniske problemer løses på basis af naturlove og ikke ved anvendelse af løse fornemmelser.

De opgaver, der afslutter hvert kapitel har en ret varierende sværhedsgrad. En række indledende opgaver i hvert kapitel har til formål at indøve det pågældende kapitels indhold. Disse opgaver er markeret med et (I). Enkelte af bogens opgaver har et indhold, der som normalt ved eksamensopgaver, kræver anvendelse af flere kapitlers emner. Disse opgaver er markeret med et (E). Endelig vil nogle af opgaverne være ret løst formulerede. Det vil typisk dreje sig om opgaver med et mere praktisk indhold. I disse opgaver skal løseren selv finde de væsentlige oplysninger ud fra tekstens samlede beskrivelse af problemet. Desuden skal manglende oplysninger enten fremskaffes eller vurderes selvstændigt. Disse opgaver er markeret med et (G), da de vil være velegnede til gruppearbejde.

Rundt om i teksten er stillet en række spørgsmål, der måske kan virke irriterende på læseren, da der ikke er givet løsninger. Formålet med spørgsmålene er at inspirere til arbejde med fagets problemer. I mange tilfælde vil et spørgsmål kunne danne udgangspunkt for en gruppediskussion.

Denne bog er en udvidelse af den tidligere udgave, idet to kapitler om bølger og om fluid mekanik er tilføjet. Der er ikke væsentlige ændringer i resten af bogen.

Bogens figurer er udført af Finn Mielke og Ove Broo Sørensen, der takkes for smukt arbejde og stor tålmodighed over for de krakilske forfattere. En række vignetter i forbindelse med opgaverne er udført af Klaus Bjørn Olsen, der takkes for et oplivende indslag.

I årenes løb har mange studerende bidraget med rettelser og forbedringsforslag. Tak for det. En række kolleger, Jes Christoffersen, Ole Knudsen, Leif Mejlbro, Kurt Petersen, Birger Selsmark og Georg Trumpy takkes for en række kommentarer, der har bidraget til at forbedre bogen.

17/12 1999

Gunnar Christiansen, Erik Both, Preben Østergaard Sørensen
Institut for Fysik
Bygning 307
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kongens Lyngby

Indholdsfortegnelse

Eksempelfortegnelse

Kapitel 1. Fysiske størrelser og enheder

Indledning

I mekanikken beskrives sammenhænge mellem påvirkning og bevægelse. Det er en erfaring, at de størrelser, der indgår i mekanikken som f.eks. hastighed, acceleration, vinkelhastighed, masse, kraft, kraftmoment og arbejde, alle kan måles i enheder, der er potensprodukter af tre grundenheder. I dette kapitel vil det internationalt anbefalede enhedssystem, *SI-systemet,* blive beskrevet. Det vil desuden blive understreget, hvorledes man gennem *dimensionskontrol* får et hjælpemiddel af stor betydning ved problemløsning.

Meget af dette kapitels indhold vil være kendt fra gymnasiet. Imidlertid viser erfaringen, at mange ikke har et tilstrækkeligt kendskab til dimensionskontrol.

Fysiske størrelser

Det, der karakteriserer fysikken, er den *eksperimentelle metode.* I fysikken ønsker man at opstille love, der beskriver områder af virkeligheden. Disse fysiske love, der udtrykkes som matematiske relationer mellem fysiske størrelser, verificeres ved eksperimenter. Et eksperiment kan enten være et arrangeret laboratorieeksperiment eller en naturiagttagelse. Fælles for dem er, at observationerne af de fysiske størrelser må fastlægges nøje. De størrelser, der indgår i en fysisk lov, defineres ved bestemte *måleoperationer.* En fysisk størrelse er i princippet bestemt ved nogle fastlagte operationer, der måler den fysiske størrelse ved at sammenligne den med en tilsvarende størrelse, der er valgt som enhed. En *fysisk størrelse* udtrykkes således som produktet af et *måltal* og en *enhed*

fysisk størrelse = *måltal* × *enhed*

Der findes forskellige arter af fysiske størrelser som f.eks. længde, masse, tid, hastighed, kraft, tryk, energi og temperatur. Størrelser af samme art kan sammenlignes ved målinger, der angiver forholdet mellem størrelserne. Størrelser af forskellig art, f.eks. en længde og en temperatur, kan derimod ikke sammenlignes ved måling. Benyttes forskellige enheder, vil en given fysisk størrelse naturligvis karakteriseres ved forskellige måltal. Følgende fem størrelser, $2{,}68 \cdot 10^{-18}$ lysår, $15{,}8 \cdot 10^{-6}$ mile , $13{,}7 \cdot 10^{-6}$ sømil , 2,54 cm og 1 inch, er alle lige store.

Enheder, enhedssystemer

Der har op gennem tiderne været benyttet mange forskellige enhedssystemer. Ved internationale overenskomster, som efterhånden de fleste lande, heriblandt Danmark, har tilsluttet sig, er det i dag benyttede system det såkaldte *SI-system* (Systeme Internationale d'Unites). SI-systemet er opbygget på basis af syv såkaldte *grundenheder: 1 meter, 1 kilogram, 1 sekund, 1 ampere, 1 kelvin, 1 mol* og *1 candela.* Disse størrelsers definitioner er angivet i afsnittet om SI-systemet.

I mekanikken er kun de tre førstnævnte grundenheder nødvendige. Det viser sig, at alle andre enheder gennem mekanikkens definitionsligninger kan udtrykkes som simple potensprodukter af grundenhederne, f.eks. er enheden for kraft 1 newton = 1 kg m/s^2 . Enheder, der er udtrykt ved potensprodukter af grundenhederne kaldes *afledede enheder.* For de afledede enheder gælder, at der er samme forhold mellem måltallene som mellem de fysiske størrelser. Et enhedssystem, der er opbygget ud fra grundenheder og afledede enheder, kaldes et *afstemt enhedssystem.* Enheder, der ikke er afstemte med SI-systemet har talfaktorer i de relationer, der forbinder dem med SI-enheden, således er f.eks. 1 cal = 4,19 J, 1 kWh = $3{,}60 \cdot 10^6$ J og 1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J. Arbejder man systematisk med talværdier angivet i SI-enheder, vil resultatet af en udregning af et sammensat udtryk altid blive en talværdi, der er udtrykt i en af SI-systemets enheder. Er en størrelse i et problem opgivet i en "ikke-SI-enhed", er det fornuftigt straks at omsætte til en SI-enhed.

I fig. 1.1 er foretaget en opstilling, der grafisk søger at vise nogle enhedssammenhænge. Venstre søjle angiver seks af grundenhederne, medens de øvrige søjler viser en række sammensatte enheder. En række hyppigt benyttede enheder er navngivet efter en person, hvis virke har været af betydning inden for den gren af fysikken, hvor enheden benyttes. I disse tilfælde er enhedens navn også medtaget, f.eks. newton. Bemærk anvendelsen af store og små begyndelsesbogstaver, 1 N = 1 newton.

SI-systemet er det, der ifølge internationale aftaler skal anvendes i Danmark. Der er ingen dybereliggende årsager til, at det nuværende SI-system er mest udbredt. Det skyldes dels tradition, dels at de grundlæggende størrelser kan defineres og måles meget nøjagtigt.

SI-systemets basale princip har været som udgangspunkt at benytte så få grundlæggende størrelser som muligt. De grundlæggende størrelser skal desuden være veldefinerede. Ældre enhedssystemer har i de grundlæggende størrelsers definition indeholdt parametre som vands massefylde ved 4°C, tyngdekraftens størrelse i Paris og Jordens omløbstid om Solen. Disse parametre, der enten er upræcise i definitionerne eller vanskelige at måle, er ikke længere brugbare. Af det følgende vil fremgå, at de grundlæggende størrelser i dag er yderst veldefinerede.

SI-systemet

SI-enhedssystemet er via Handelsministeriets bekendtgørelse nr. 320 af 21. maj 1977 og lov nr. 173 af 28. april 1982 fastlagt som grundlag for angivelse af mål og vægt i Danmark.

Fra bekendtgørelsen citeres i uddrag:

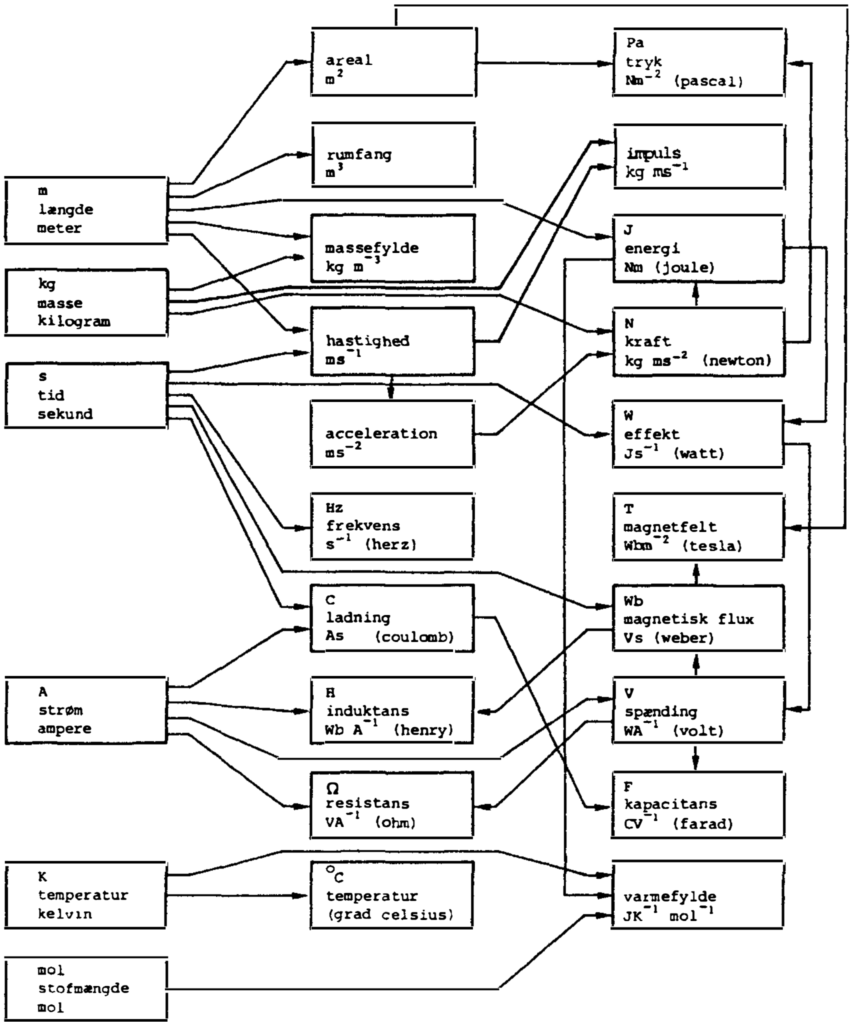

Fig. 1.1 Sammenhænge mellem SI-enheder

1. Enhederne.

1.1 Grundenheder.

Det internationale enhedssystem er baseret på syv grundenheder, der er givet i tabel 1.1.

Definitioner af grundenhederne i det internationale enhedssystem.

Tabel 1.1 SI-grundenheder

Størrelse	Grundenhedens navn	Symbol
længde	meter	m
masse	kilogram	kg
tid	sekund	s
elektrisk strøm	ampere	A
termodynamisk temperatur	kelvin	K
stofmængde	mol	mol
lysstyrke	candela	cd

METER

En meter er defineret som længden af den vej, lyset gennemløber i det tomme rum i løbet af tiden 1/299 792 458 sekund.

KILOGRAM

Et kilogram er defineret som massen af den internationale kilogramprototype.

SEKUND

Et sekund er defineret som varigheden af 9 192 631 770 perioder af strålingen af cæsium-133 atomet ved overgang mellem grundtilstandens to hyperfinstruktur-niveauer.

AMPERE

En ampere er defineret som strømstyrken af en konstant elektrisk strøm, der - når den løber i to parallelle, uendeligt lange ledere med forsvindende lille cirkulært tværsnit, som har en indbyrdes afstand på 1 meter og er anbragt i det tomme rum - bevirker, at den ene leder påvirker den anden med kraften $2 \cdot 10^{-7}$ newton for hver meter.

KELVIN

En kelvin er defineret som brøkdelen 1/273,16 af vands tripelpunkts termodynamiske temperatur.

MOL

Et mol er defineret som den stofmængde af et system, der indeholder lige så mange elementære dele, som der er atomer i 0,012 kilogram carbon-12. Ved brug af molet må de elementære dele specificeres; det kan være atomer, molekyler, ioner, elektroner, andre partikler eller specificerede grupper af sådanne partikler.

CANDELA

En candela er defineret som lysstyrken i en given retning af en lyskilde, som udsender monokromatisk lys med en frekvens på $540 \cdot 10^{12}$ hertz, og hvis strålingsstyrke i denne retning er 1/683 watt pr. steradian.

I bekendtgørelsen defineres tillige de supplerende enheder vinkel med symbolet *rad* og rumvinkel med symbolet *sr*.

RADIAN

En radian er den plane vinkel, som af en cirkel med centrum i vinklens toppunkt udskærer en buelængde lig cirklens radius.

STERADIAN

En steradian er den rumvinkel, som af en kugleflade med centrum i rumvinklens toppunkt udskærer et areal lig arealet af et plant kvadrat, hvis side er lig kuglens radius.

En række afledede enheder og deres symboler er dannet ved multiplikation og/eller division af grundenheder og supplerende enheder. For nogle af disse afledede SI-enheder er vedtaget særlige navne og symboler, der er angivet i tabel 1.2.

Tabel 1.2 Nogle afledede SI-enheder og deres navne

Størrelse	SI-enhedens navn	Symbol	SI-enhed
frekvens	hertz	Hz	$1\ Hz = 1\ s^{-1}$
kraft	newton	N	$1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$
tryk, spænding	pascal	Pa	$1\ Pa = 1\ N/m^2$
arbejde, energi	joule	J	$1\ J = 1\ N \cdot m$
effekt	watt	W	$1\ W = 1\ J/s$
elektrisk ladning	coulomb	C	$1\ C = A \cdot s$
elektrisk potential, elektromotorisk kraft, elektrisk spænding	volt	V	$1\ V = 1\ J/C$
elektrisk kapacitans	farad	F	$1\ F = 1\ A \cdot s/V$
elektrisk resistans	ohm	Ω	$1\ \Omega = 1\ V/A$
magnetisk flux	weber	Wb	$1\ Wb = 1\ V \cdot s$
magnetisk induktion, magnetisk fluxtæthed	tesla	T	$1\ T = 1\ Wb/m^2$
induktans	henry	H	$1\ H = 1\ V \cdot s/A$
lysstrøm	lumen	lm	$1\ lm = 1\ cd \cdot sr$
radioaktivitet	becquerel	Bq	$1\ Bq = 1\ s^{-1}$

Tabel 1.3 Tilladte enheder, der ikke tilhører SI-systemet

Størrelse	Enhedens navn	Enhedens symbol	Definition
tid	minut	min	1 min = 60 s
	time	h	1 h = 60 min
	døgn	d	1 d = 24 h
vinkel	grad	...°	$1° = (\pi/180)$ rad
	minut	...′	$1' = (1/60)°$
	sekund	...″	$1'' = (1/60)'$
	gon	gon	1 gon = $(\pi/200)$ rad
volumen	liter	ℓ	$1\ \ell = 1\ dm^3$
masse	ton	t	$1\ t = 10^3$ kg
luft- og væsketryk	bar	bar	1 bar = 10^5 Pa

En række andre enheder er tilladt anvendt, se tabel 1.3.

Desuden er der inden for visse fagområder lovligt at benytte en række traditionsbestemte enheder som f.eks. sømil, knob (skibs- og luftfart), ar (areal af grunde og jorder), karat (masse af ædelstene), millimeter kviksølv (blodtryksmåling) og curie (radioaktivitet).

Lidt historie

Det i dag anvendte enhedssystem er den foreløbige slutsten på en lang udvikling. Denne udvikling afspejler både ændringer i samfundsstrukturen og naturvidenskabelige og tekniske fremskridt.

Fra en situation, hvor hver by og hvert fag havde sin alenstok, opstod i det 16. og 17. århundrede behov for landsdækkende enheder. I Danmark var Ole Rømer foregangsmanden. Ud over i 1683 at indføre landsdækkende enheder, var han tillige den første, der sammenknyttede længde- og rumfangsenhederne.

Meteren, sekundet og kilogrammet som grundenheder går tilbage til Frankrig i slutningen af 1700-tallet. Meteren var oprindeligt defineret som 1/10 000 000 af afstanden fra pol til ækvator langs en storcirkel. Fordelen herved var en normalmeter som krige og naturkatastrofer ikke kunne ødelægge. Ulempen var, at afstanden var svær at måle. Snart blev meterdefinitionen således ændret til at være afstanden mellem to streger på en platin-iridiumsstang opbevaret i Paris. En dansk kopi af normalmeteren opbevares i et laboratorium på DTU i Lyngby.

Med udviklingen af den optiske spektroskopi i dette århundrede fremkom metoder, der bevirkede, at den oprindelige meterdefinition ikke længere var nøjagtig nok. Meteren var herefter en tid defineret ud fra bølgelængden af en bestemt veldefineret stråling. Med laserteknikkens og elektronikkens seneste fremskridt var heller ikke denne definition tilstrækkelig præcis. I dag defineres meteren ud fra lyshastigheden.

Medens man tidligere med mere og mere forfinede metoder målte lyshastigheden, er denne nu fastsat til en bestemt værdi. En ny og bedre bestemmelse af lyshastigheden vil således i realiteten være en mere præcis fastlæggelse af meterens længde.

Også sekundet har haft forskellige definitioner. Som meteren var sekundet oprindelig fastsat ud fra "jordiske værdier". Sekundet blev da bestemt som en brøkdel af et døgns længde. Denne definition var imidlertid ret ubestemt, idet døgnets længde udviser såvel kort- som langtidsvariationer. Siden 1967 anvendes avanceret mikrobølgeteknik til fastlæggelse af sekundets længde.

Kilogrammet var oprindelig defineret ud fra massen af en dm^3 vand ved 4°C, således at der ikke behøvedes en egentlig normal. Imidlertid er præcise rumfang vanskelige at realisere, og temperaturer er svære at styre, så også for kilogrammet kom en ny definition. De seneste 100 år er kilogrammet defineret ud fra massen af et platin-iridiumlod opbevaret i Paris. (Også her findes en sikkert opbevaret kopi på DTH).

Dimension, dimensionskontrol

De tre grundenheder, der anvendes i mekanikken, meteren, kilogrammet og sekundet, siges at have dimensionerne længde, masse og tid. Disse dimensioner skrives som $[L]$, $[M]$ og $[T]$. En sammensat størrelses dimension er et potensprodukt af de indgående størrelsers dimensioner. Således er hastighedens dimension $[LT^{-1}]$ og kraftens dimension $[MLT^{-2}]$.

Til kontrol og fejlfinding af opgaveløsninger bør dimensionskontrol være en standardrutine. Medens matematikere traditionelt behandler talligninger, dvs. ligninger hvor de optrædende variable og konstanter er dimensionsløse, behandler fysikere størrelsesligninger. I matematikken kan a og b altid adderes til resultatet $c = a + b$. Fysikere kan derimod kun addere a og b, hvis de har samme dimension. Tillige har størrelser som $\ln a$, $\sin b$ og e^c kun mening i en fysikers ligninger, hvis a, b og c er dimensionsløse.

Disse overvejelser bør ALTID benyttes ved kontrol af løste problemer. Er et facit fundet som $Facit = f(a,b,c,...)$ bør undersøges, om led, der adderes i facit har samme dimension, om eksponenter er dimensionsløse, osv. Desuden skal funktionsudtrykket som helhed have samme dimension som facit. Er disse krav opfyldte, kan facit være korrekt. Er kravene ikke opfyldte, er facit med garanti forkert. Ved at gå tilbage i udregningerne finder man det sted, hvor dimensionsfejlen første gang optræder. Her er begået en fejl. Undertiden vil man i øvrigt af dimensionsfejlens art kunne se hvilken fejl, der er begået.

I praksis udføres dimensionskontrollen ofte som en *enhedskontrol.* Ved i en afsluttende taludregning at indsætte alle størrelsers SI-enheder vil en gennemregning hurtigt vise, om der undervejs f.eks. er adderet en masse og en energi, eller om en størrelse er opløftet til en potens med enheden sekund.

Er et udtryks dimension eller enhed i orden, er det ikke en garanti for, at alt er korrekt. Er der derimod en dimensions- eller enhedsfejl, er facit forkert. Ved at gå tilbage i udregningerne, kan man hurtigt afsløre art og placering af såvel banale som alvorlige fejl.

Eksempel 1.1 Fejlfinding ved enhedskontrol

I dette eksempel skal vises, hvorledes enhedskontrol kan benyttes ved fejlfinding.

Svingningstiden T for et pendul med snorlængden $\ell = 0{,}50\ m$ ønskes fundet. Til bestemmelse af T benyttes formlen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

hvor g er tyngdeaccelerationen. Indsættes talværdier, findes

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}50}} = 28\ s$$

Den vågne problemløser vil studse over dette resultat. Talværdien virker urimelig stor. Alene dette vil være tilstrækkelig grund til at gå på fejlsøgning.

Den samvittighedsfulde problemløser vil foretage en enhedskontrol ved at indsætte

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9{,}8\ m\ s^{-2}}{0{,}50\ m}} = 28\ s^{-1} \quad !$$

Herved opdages, at formlen i skyndingen var skrevet forkert op. Med

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

fås det rigtige resultat, $T = 1{,}42\ s$.

Sammendrag af kapitel 1

I kapitlet gennemgås SI-enhedssystemet. Det bliver specielt understreget, at det er absolut nødvendigt, at alle resultater og delresultater underkastes en dimensions- eller enhedskontrol.

Kapitel 2. Kinematik

Indledning

I *kinematikken* (af græsk kinema ~ bevægelse) behandles bevægelse, dvs. sammenhænge mellem position, hastighed og acceleration uden hensyntagen til de påvirkninger (kræfter), der forårsager bevægelsen. I *dynamikken* (af græsk dynamis ~ kraft) behandles sammenhænge mellem bevægelse og kraft. Det er en hovedopgave i mekanikken både at kunne bestemme et legemes position som funktion af tiden, når de virkende kræfter er kendte, og omvendt, at kunne bestemme kræfterne, når bevægelsen er kendt.

Formålet med dette kapitel er at give en systematisk fremstilling af de størrelser, der beskriver en partikels eller et legemes bevægelse. For at kunne beskrive en bevægelse er det nødvendigt at have et koordinatsystem, ud fra hvilket partiklens eller legemets position kan fastlægges. Det koordinatsystem, i forhold til hvilket man vælger at beskrive bevægelsen, kaldes et *henførelsessystem.* Et henførelsessystem kan vælges på uendelig mange måder, og beskrivelsen afhænger af hvilket henførelsessystem, der anvendes. I kapitlet defineres de vektorielle størrelser *position, hastighed* og *acceleration.* Tillige defineres de størrelser, der beskriver en roterende bevægelse, nemlig *vinkel, vinkelhastighed* og *vinkelacceleration.* Specielt behandles cirkelbevægelse.

Position, hastighed og acceleration

Det vil være fornuftigt at begynde med at betragte et legeme med små dimensioner. Et sådant legeme, hvis udstrækning man kan se bort fra, kaldes en *partikel.* Om et legeme kan betragtes som en partikel eller ej, afhænger af de fysiske forhold. Jorden kan f.eks. betragtes som en partikel i sin bevægelse om Solen, men ikke i forhold, hvor dens rotation indgår.

I et henførelsessystem er *positionen* af en partikel fuldstændig fastlagt ved tre parametre, f.eks. xyz-koordinaterne i et retvinklet koordinatsystem. En partikel siges derfor at have tre *frihedsgrader.* xyz-koordinaterne definerer partiklens stedvektor $\mathbf{r}$ fra koordinatsystemets nulpunkt O til partiklens position. Hvis partiklen bevæger sig, er $\mathbf{r}$ en funktion af tiden t. Partiklens banekurve er da givet ved

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x,y,z) = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z \tag{2.1}$$

hvor $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ og $\mathbf{e}_z$ er enhedsvektorer langs koordinatsystemets akser, se fig. 2.1. Det bemærkes, at vektorer i denne fremstilling skrives med fede typer i teksten. På figurer sættes en streg under vektorsymbolerne. $\mathbf{e}_x$ bliver herved til $\underline{e}_x$.

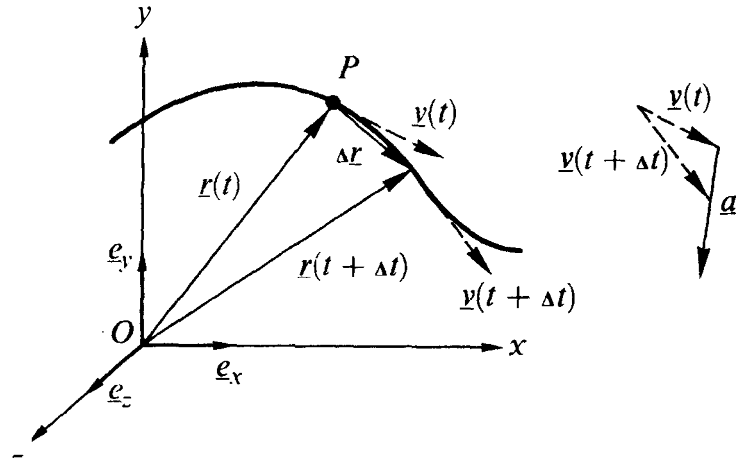

Fig. 2.1 Stedvektor $\mathbf{r}$*, hastighed* $\mathbf{v}$ *og acceleration* $\mathbf{a}$

En partikels øjeblikkelige *hastighed* $\mathbf{v}$ er defineret som

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.2}$$

$\mathbf{v}$ kan skrives på forskellig vis. Længden af den bane partiklen på fig. 2.1 har bevæget sig i tiden Δt kaldes for Δs. Ligning (2.2) kan nu omskrives til

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_T \tag{2.3}$$

hvor $\mathbf{e}_T$ er en enhedsvektor, der er tangent til banekurven. Hastigheden $\mathbf{v}$ er således tangent til banekurven. Størrelsen ds/dt kaldes *farten* og er lig hastighedens numeriske størrelse. Af ligning (2.1) ses, at $\mathbf{v}$ kan skrives som

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \tag{2.4}$$

dvs. farten v kan udtrykkes som

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.5}$$

En partikels øjeblikkelige *acceleration,* vektoren $\mathbf{a}$, er, se fig. 2.1, defineret som

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{2.6}$$

dvs. $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ eller analogt med udtrykkene (2.1) og (2.4)

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \tag{2.7}$$

Accelerationens numeriske værdi a bliver

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.8)$$

Bevæger en partikel sig nær jordoverfladen alene under påvirkning af Jordens tiltrækning, vil den have en acceleration, *tyngdeaccelerationen* g. Tyngdeaccelerationen afhænger bl.a. af stedets breddegrad, se kapitel 6 og 10. I Danmark har g størrelsen 9,82 m/s^2.

I definitionsligningerne (2.1) til (2.8) er udledningerne sket den ″modsatte″ vej af det, man oftest møder. Normalt har man kendskab til accelerationen, f. eks. fra Newtons anden lov og skal derpå beregne banekurven, dvs. positionen som funktion af tiden. I det følgende afsnit omtales to metoder, der kan benyttes, når en partikels position ønskes fundet ud fra kendskab til dens acceleration.

Analytisk løsning eller numerisk løsning

Kendes accelerationen **a**, kan man i princippet bestemme positionen på to måder. Man kan integrere accelerationsudtrykket analytisk, dvs. ved hjælp af metoder kendt fra matematisk analyse, eller man kan integrere numerisk ved anvendelse af en datamat. Den første metode er den, der normalt vil blive anvendt i bogen, dvs. eksempler og opgaver vil være begrænset til sådanne, der har en matematisk løsning. Man bør imidlertid være opmærksom på, at datamater i dag gør det muligt at løse problemstillinger, der ikke kunne klares for få årtier siden. I resten af bogen vil kun blive vist enkelte eksempler på numeriske løsninger. De numeriske metoder, der beskrives, er letforståelige, men meget primitive og tidkrævende for datamaten.

Den analytiske løsning tager sit udgangspunkt i en viden om **a** fra en fysisk lov, f.eks. Newtons anden lov. Man siger da, at man kender *bevægelsesligningen*. Generelt vil **a** være en funktion af **r**, **v** og t. Løsningsmetoden afhænger naturligvis af denne afhængighed. Der vil i bogen blive behandlet forskellige tilfælde. I kapitel 4 vil specielt blive vist de metoder, der benyttes, når $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$.

Ved den numeriske løsning antages det, at accelerationen **a** er kendt. Det antages desuden, at startværdier for position og hastighed er kendte. I det følgende vil kun bevægelser i xy-planen blive bestemt, men metoden udvides let til tre dimensioner. Man kan ud fra værdierne af positionen $\mathbf{r} = (x,y)$ og af hastigheden $\mathbf{v} = (vx,vy)$ bestemme positionen til tidspunktet dt senere ved udtrykkene

$$\begin{aligned} x &= x + vx{*}dt \\ y &= y + vy{*}dt \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Disse ligninger er sætninger i et datamatprogram og skal opfattes således: Positionen $\mathbf{r} = (x,y)$ til tiden dt senere er lig den gamle position plus $d\mathbf{r} = \mathbf{v}{*}dt = (vx,vy){*}dt$. På tilsvarende måde findes den nye værdi af hastigheden ud fra værdien af accelerationen **a** som

$$\begin{aligned} vx &= vx + ax{*}dt \\ vy &= vy + ay{*}dt \end{aligned} \qquad (2.10)$$

hvor $\mathbf{a} = (ax,ay)$ er bestemt, f.eks. af Newtons anden lov. Endelig er den nye værdi af tiden givet ved

$$t = t + dt \tag{2.11}$$

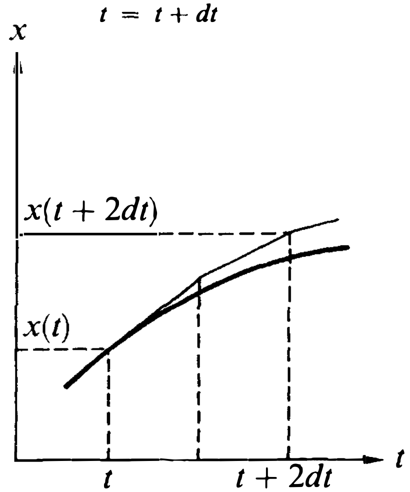

Fig. 2.2 Eulers metode. Den numeriske løsning svarer til, at tangenten til kurven følges i små tidsstep

Ved at lade datamaten gennemløbe disse fem programtrin et stort antal gange kan man finde en tilnærmet værdi af positionen som funktion af tiden. I eksempel 2.3 vil blive vist, hvorledes denne metode benyttes til løsning af et bevægelsesproblem. På fig. 2.2 er x-koordinaten vist som funktion af tiden t . Da $vx = dx/dt$ er hældningen af kurven, ses det, at den numeriske løsning må forventes at forbedres, når dt går mod små værdier. Metoden kaldes *Eulers metode.* Den er simpel, begrænset nøjagtig og tidkrævende for datamaten. Det kræver et godt kendskab til numerisk analyse, herunder specielt numeriske metoder til løsning af sædvanlige differentialligninger, hvis man vil arbejde effektivt med numerisk løsning af bevægelsesligningen, dvs. Newtons anden lov.

Eksempel 2.1 Bevægelse med konstant acceleration

I dette eksempel ønskes en partikels banekurve bestemt som funktion af tiden. Partiklens acceleration, $\mathbf{a}_o$, er konstant. Det antages, at partiklens position og hastighed til tiden $t = 0$ er henholdsvis $\mathbf{r}_o$ og $\mathbf{v}_o$.

Ved integration bestemmes hastigheden som funktion af tiden, og ved endnu en integration fås positionen som funktion af tiden.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_o \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{v} = \mathbf{a}_o\, dt$$

Dette udtryk integreres. Højresidens grænser går fra $t = 0$ til $t = t$, og de tilsvarende værdier af $\mathbf{v}$ er $\mathbf{v}_o$ og $\mathbf{v}(t)$, dvs.

$$\int_{\mathbf{v}_o}^{\mathbf{v}(t)} d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}_o\, dt \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_o + \mathbf{a}_o\, t$$

Af $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ fås

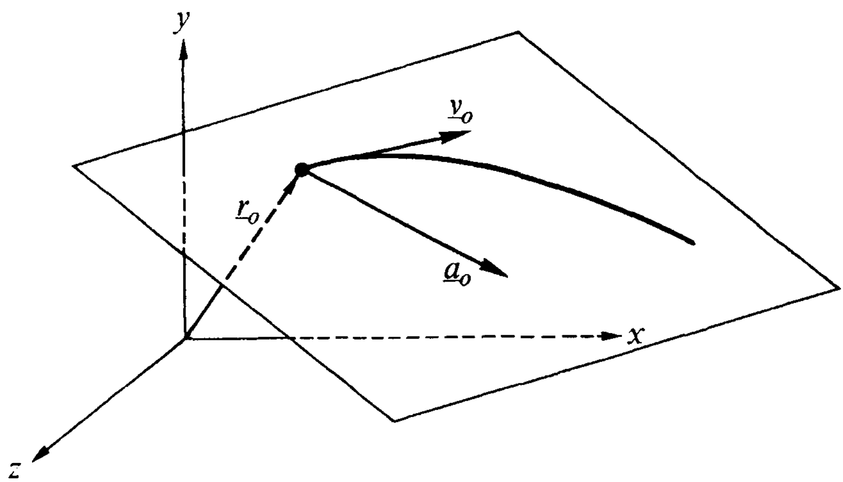

Fig. 2.3 Banebevægelse ved konstant acceleration

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}_o\, dt + \mathbf{a}_o\, t\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{r}_o}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{r} = \int_0^t (\mathbf{v}_o\, dt + \mathbf{a}_o\, t\, dt) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o\, t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_o\, t^2 \qquad (2.12)$$

Bevægelsen foregår i en plan, der indeholder $\mathbf{v}_o$ *og* $\mathbf{a}_o$ *samt* $\mathbf{r}_o$*'s endepunkt, se fig. 2.3. Bevægelsen bestemt af ligning (2.12) kan vises at være en parabel.*

Bevægelsen antages nu at foregå i en lodret plan, (x,y)*-planen, hvor accelerationen* $\mathbf{a}_o$ *er bestemt af* $\mathbf{a}_o = -g\,\mathbf{e}_y$ *, se fig. 2.4. Med* $\mathbf{r}_o = (0,0)$ *og* $\mathbf{v}_o = (v_o \cos\theta,\ v_o \sin\theta)$ *findes*

$$\mathbf{r} = (x,y) = (v_o t \cos\theta,\ v_o t \sin\theta - \tfrac{1}{2} g\, t^2) \qquad (2.13)$$

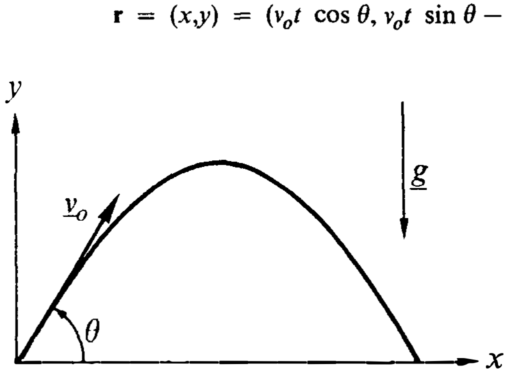

Fig. 2.4 Banebevægelse i tyngdefelt, kasteparabel. Startværdierne v_o *og* θ *er vist*

For bevægelse langs en ret linje med konstant (skalær) acceleration a_o *fås, idet* $x = x_o$ *og* $v = v_o$ *til tiden* $t = 0$

$$
\begin{aligned}
v &= v_o + a_o t \\
x &= x_o + v_o t + \tfrac{1}{2} a_o t^2 \\
v^2 &= v_o^2 + 2a_o (x - x_o)
\end{aligned}
\qquad (2.14)
$$

Eksempel 2.2 Jagtepisode

En krybskytte sigter på et egern, der sidder i et træ, se fig. 2.5. I samme øjeblik som egernet ser mundingsilden, lader det sig falde fra sin gren. Det skal vises, at dette var en uheldig disposition fra egernets side.

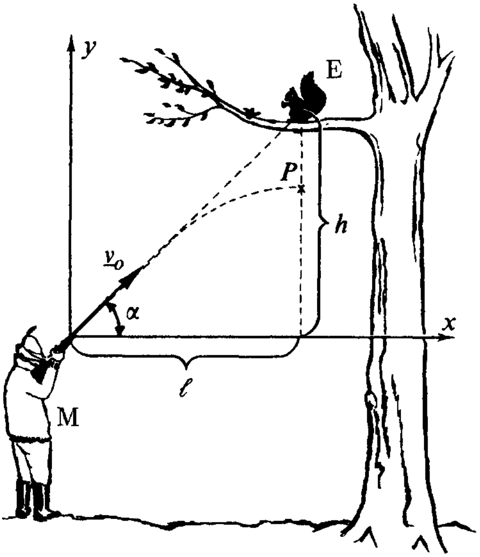

Fig. 2.5 Egern og krybskytte

Det antages, at kuglen forlader geværmundingen til tiden $t = 0$ med hastigheden v_o. I det indtegnede koordinatsystem er bevægelsen for kugle og egern givet ved

kugle:

$$x_k = v_o t \cos\alpha$$

$$y_k = v_o t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

egern:

$$x_e = \ell$$

$$y_e = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Kuglen er lodret under egernets siddeplads (ℓ,h) til tiden $t = t_1$

$$\ell = v_o t_1 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\ell}{v_o \cos\alpha}$$

Kuglens y-komposant til tiden $t = t_1$ er givet ved

$$y_k = v_o \frac{\ell}{v_o \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1^2$$
$$= \ell \tan\alpha - \frac{1}{2} g t_1^2 = h - \frac{1}{2} g t_1^2 = y_e(t_1)$$

Kugle og egern befinder sig altså i samme punkt, P . Dette resultat er uafhængigt af kuglens hastighed, men træfpunktet, P's position, afhænger selvfølgelig af $\mathbf{v}_o$. Sagt med få ord og uden formler: Uden tyngde ville kuglen bevæge sig langs den rette linje ME. Tyngden bevirker, at kuglen begynder at falde fra det øjeblik, den forlader mundingen. Bevægelsen kan deles op i en jævn vandret bevægelse og en accelereret bevægelse lodret nedad. Denne sidste bevægelse og egernets fald har samme acceleration. Altså bliver det stakkels egern ramt uafhængigt af kuglens hastighed.

Eksempel 2.3 Kasteparabel løst numerisk

Nedenfor er vist en stump af et BASIC program til beregning af en kasteparabel. Kasteparablen er fundet analytisk i eksempel 2.1, ligning (2.13). Programmet benytter Eulers metode, ligningerne (2.9) til (2.11).

```
 70 ALFA=45.                startvinkel
 80 ALFA=ALFA*PI/180.
 90 VO=14.                  starthastighed
100 DT=.005                 tidsstep
110 AX=0.
120 AY=-9.8                 tyngdeacceleration
130 VX=VO*COS(ALFA)
140 VY=VO*SIN(ALFA)
150 X=0.                    startværdier
170 Y=2.
180 T=0.
200 REM *** LOOP ***
210 FOR I=1 TO 500
230 X=X+VX*DT
240 Y=Y+VY*DT
250 VX=VX+AX*DT
260 VY=VY+AY*DT
270 T=T+DT
280 NEXT
```

I nedenstående tabel 2.1 er programmet benyttet på et simuleret kuglestød på ca. 20 m. Kuglen slippes i 2,00 m's højde og med startvinklen $\alpha = 45{,}0°$ med vandret. Kuglens starthastighed er 14,0 m/s. I tabellen er det analytiske resultat af ordinaten Y, dvs. den eksakte værdi, sammen-

lignet med de værdier, datamaten opnår ved fire forskellige valg af tidssteppet DT. For hver kolonne er tidssteppet øget fem gange. Datamatens udregninger af de tilhørende X-værdier er meget nøjagtige, idet der ikke er nogen acceleration i X-aksens retning.

Tabel 2.1 Sammenligning mellem analytisk og numerisk løsning

	Analytisk	Numeriske Y-værdier for forskellige DT'er			
X	Y-værdi	0,001	0,005	0,025	0,125
2,48	4,17	4,17	4,18	4,20	4,32
4,95	5,73	5,73	5,74	5,79	6,03
7,43	6,67	6,67	6,69	6,76	7,13
9,90	7,00	7,00	7,02	7,12	7,61
12,37	6,72	6,72	6,75	6,87	7,48
14,85	5,83	5,83	5,86	6,01	6,74
17,32	4,32	4,33	4,36	4,53	5,39
19,80	2,20	2,21	2,25	2,44	3,42
22,27	-0,53	-0,52	-0,48	-0,26	-1,15
24,75	-3,88	-3,86	-3,82	-3,75	-2,35

I kuglestødseksemplet er det muligt at løse problemet analytisk. I mange tilfælde kan imidlertid kun nås resultater ved hjælp af numeriske metoder. Medtages således luftmodstand og effekter, der skyldes kuglens rotation, er alene numeriske metoder i stand til at bestemme banekurven.

Cirkelbevægelse. Vinkel, vinkelhastighed og vinkelacceleration

I dette afsnit betragtes cirkelbevægelsen, en bevægelsestype, der hyppigt mødes inden for mekanikken. Eksempelvis vil alle massedele i et stift legeme ved rotation om en akse udføre cirkelbevægelser. Der indføres størrelser, der beskriver en cirkelbevægelse, nemlig vinkel, vinkelhastighed og vinkelacceleration. Der vil tillige blive fundet et udtryk for accelerationen af en partikel, der udfører en cirkelbevægelse.

En partikel P bevæger sig på en cirkel med radius R, se fig. 2.6. Buelængden s måles fra punktet A til partiklens position. Den tilhørende vinkel betegnes θ. Der gælder da

$$s = R\theta \qquad (2.15)$$

Hastigheden $\mathbf{v}$ af partiklen er tangent til cirklen. Farten v findes ved at differentiere ligning (2.15)

$$v = \frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt}$$

Indføres *vinkelhastigheden* ω defineret ved

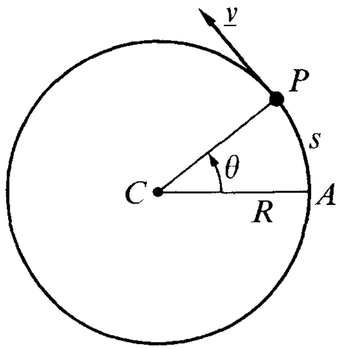

Fig. 2.6 Parametrene R , θ og s ved cirkelbevægelse

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{2.16}$$

kan v skrives som

$$v = R\omega \tag{2.17}$$

Vinkelhastigheden ω har enheden s^{-1} eller rad/s . Ved igen at differentiere med hensyn til tiden fås accelerationen langs tangentens retning, a_T

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} \tag{2.18}$$

I dette udtryk kaldes $d\omega/dt$ for *vinkelaccelerationen.* Enheden for $d\omega/dt$ er s^{-2}. Man kan ved mange problemstillinger finde et udtryk for vinkelaccelerationen, f.eks. ved hjælp af den senere definerede impulsmomentsætning. Ved integrationen med hensyn til tiden t kan vinkelhastigheden ω bestemmes og ved endnu en integration kan vinklen θ findes. Hver integration giver en arbitrær konstant, der bestemmes ved kendskab til θ og ω, f.eks. til tiden $t = 0$. Fremgangsmåden er analog til den, der angår forbindelsen mellem position, hastighed og acceleration. I ligningssættet (2.14) blev angivet et udtryk for sted og hastighed ved en retlinjet bevægelse med konstant acceleration. Et tilsvarende ligningssystem kan opstilles for en roterende bevægelse med konstant vinkelacceleration ved at erstatte sted med vinkel, hastighed med vinkelhastighed og acceleration med vinkelacceleration.

En cirkelbevægelse kan mere udførligt karakteriseres ved, at vinkelhastigheden udtrykkes som en vektor, $\boldsymbol{\omega}$. Den numeriske værdi af $\boldsymbol{\omega}$ angiver vinkelhastighedens størrelse. Retningen af $\boldsymbol{\omega}$ er vinkelret på den plan, hvori bevægelsen foregår. Positiv retning for $\boldsymbol{\omega}$ kan defineres på følgende måde, se fig. 2.7.

Højre hånds tommelfinger peger i ω's retning, når de øvrige let krummede fingre peger i cirkelbevægelsens omløbsretning.

Fig. 2.7 viser en vektor **A**, der afsættes fra punktet O. Vektoren **A** er konstant i størrelse, men ændrer hele tiden retning, således at dens endepunkt beskriver en cirkel. Vektoren **A** kan eksempelvis være stedvektoren **r** for en partikel, der udfører en cirkelbevægelse eller **A** kan være det såkaldte im-

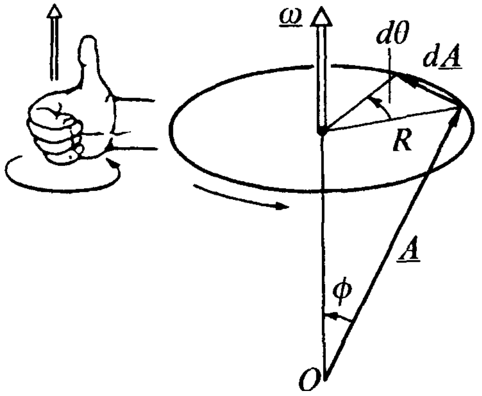

Fig. 2.7 Retning af ω defineret ved "højre hånd". Vektoren **A** *aftegner en cirkel*

pulsmoment **L** for en snurre, der præcesserer, se kapitel 8. På figuren er vinkelhastigheden $\boldsymbol{\omega}$ angivet som en vektor, der er flyttet hen til centrum af cirklen. Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ kan anbringes hvor som helst, blot størrelse og retning bibeholdes.

I det følgende skal vises, at $d\mathbf{A}/dt$ kan skrives som

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \qquad (2.19)$$

(Sidst i kapitlet gives en kort omtale af vektorprodukter). Størrelsen $d\mathbf{A}$ findes på følgende måde. Projektionen af **A** på cirklens plan kaldes R , dvs. $R = A \sin \phi$, hvor ϕ er vinklen mellem **A** og $\boldsymbol{\omega}$, se figuren. Vektoren $d\mathbf{A}$ kan da skrives som

$$d\mathbf{A} = A \sin \phi \, d\theta \, \mathbf{e}_T$$

hvor $\mathbf{e}_T$ er en enhedsvektor i tangentens retning. Idet $d\theta/dt = \omega$ fås

$$d\mathbf{A} = A \sin \phi \, \omega \, dt \, \mathbf{e}_T \qquad (2.20)$$

Ligning (2.20) kan således omskrives til formen (2.19), idet $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}|$ er lig $\omega A \sin \phi$.

For en cirkelbevægelse giver ligning (2.19), når **A** erstattes med stedvektoren **r**, og da $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, følgende udtryk for hastigheden

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (2.21)$$

Til slut skal beregnes accelerationen **a** for en partikel, der bevæger sig i en cirkelbane. Hastigheden **v** skifter hele tiden retning samtidig med, at farten v kan variere.

For en cirkelbevægelse gælder i det specielle tilfælde, at **r**'s nulpunkt ligger i cirklens centrum C (ligning (2.21) med $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, se fig. 2.8)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \qquad (2.22)$$

Da $\boldsymbol{\omega}$ er vinkelret på **R**, fås farten til $v = \omega R$, jf. ligning (2.17). Accelerationen findes nu ved differentiation

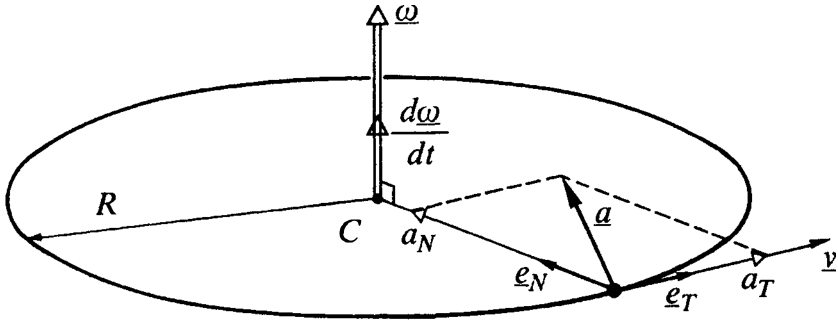

Fig. 2.8 Hastighed og acceleration ved cirkelbevægelse

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{R} + \omega \times \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

Idet $d\omega/dt$ er vinkelret på $\mathbf{R}$ og $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{R}$ fås

$$\mathbf{a} = \frac{d\omega}{dt} R\, \mathbf{e}_T + \omega(\omega R)\, \mathbf{e}_N \tag{2.23}$$

hvor $\mathbf{e}_T$ er en enhedsvektor i tangentens retning, og $\mathbf{e}_N$ er en enhedsvektor rettet fra partiklen mod centrum. Begge enhedsvektorers retninger varierer under bevægelsen. Ved benyttelse af ligningerne (2.17) og (2.18) kan $\mathbf{a}$ nu skrives som

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_T \mathbf{e}_T + a_N \mathbf{e}_N \\ &= \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_T + \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_N \end{aligned} \tag{2.24}$$

Det første led, *tangentialaccelerationen,* angår alene ændringen af hastighedens størrelse

$$a_T = R \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} \tag{2.25}$$

Det andet led, *normalaccelerationen,* angår alene ændringen af hastighedens retning

$$a_N = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \tag{2.26}$$

Normalaccelerationen kaldes også for *centripetalaccelerationen.*

Jævn cirkelbevægelse

Ved en jævn cirkelbevægelse er farten v og dermed ω konstant. Hastighed og acceleration bliver da

$$v = R\omega$$

$$a_T = 0 \tag{2.27}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Perioden eller *omløbstiden* betegnes ved en jævn cirkelbevægelse T, og antal omløb pr. tidsenhed kaldes *frekvensen*, f. Der gælder

$$f = \frac{1}{T} \tag{2.28}$$

Da et omløb svarer til vinklen 2π, og da omløbet gennemføres i tiden T, fås for en jævn cirkelbevægelse

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{2.29}$$

hvor det andet lighedstegn er gyldigt, fordi ω er konstant.

Bestemmelse af acceleration generelt

I det foregående afsnit blev accelerationen i en cirkelbevægelse bestemt. Nu betragtes det almene tilfælde, hvor partiklen beskriver en vilkårlig rumlig kurve. Resultaterne fra afsnittet om cirkelbevægelsen kan generaliseres, så de gælder for en vilkårlig bevægelse. Denne udledning tages ikke med her, men skal kun skitseres.

I rumgeometrien kan man vise, at omkring et punkt på en kurve kan kurven tilnærmes med en cirkelbue, hvis tilsvarende cirkel kaldes for kurvens *krumningscirkel* i punktet. Radius for krumningscirklen kaldes *krumnings-radius* og betegnes ρ, se fig. 2.9.

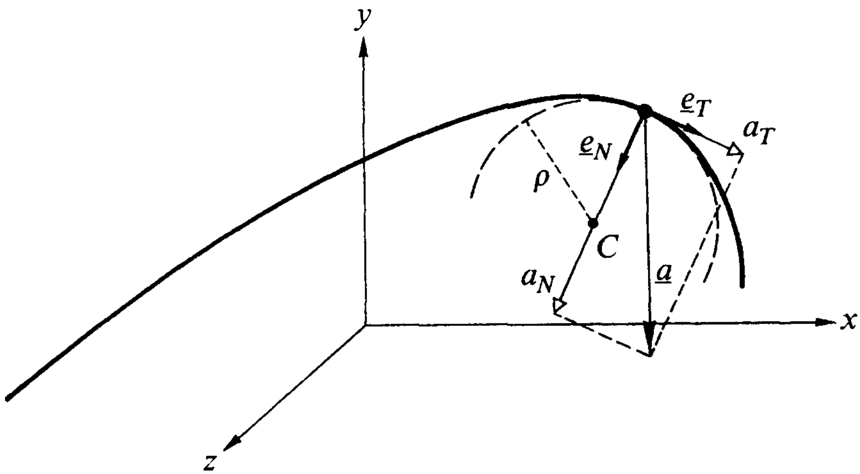

Fig. 2.9 Acceleration ved generel bevægelse. Krumningscirklen er vist punkteret

Man kan således anvende resultatet fra afsnittet om cirkelbevægelsen og opløse accelerationen **a** i en tangentialacceleration, $a_T = dv/dt$, og i en