# Descartes' *Geometri* 1. bind i oversættelse

Af Karen Thorsen (filologisk) og
Knud Erik Sørensen (matematisk terminologi)

## Problemer, hvis løsning kun kræver cirkler og rette linjer

Alle problemer i geometrien kan let reduceres, så man kan løse dem ved konstruktion, hvis man kender længden af nogle rette linjestykker.

## Hvordan aritmetiske beregninger forholder sig til geometriens operationer

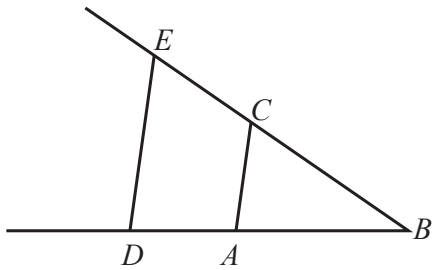
Ligesom hele aritmetikken kun består af fire eller fem operationer, nemlig addition, subtraktion, multiplikation, division og roduddragning, som man kan anse for en slags division, skal man i geometrien for at finde søgte linjestykker[38] blot addere eller subtrahere andre linjestykker.

Hvis man har et linjestykke, som jeg kalder enheden for bedre at kunne sammenholde det med tal, og som normalt kan være valgt vilkårligt, og man yderligere har givet to andre og derudfra skal finde et fjerde, som skal forholde sig til det ene af de to, ligesom det andet forholder sig til enheden, så er det det samme som multiplikation.

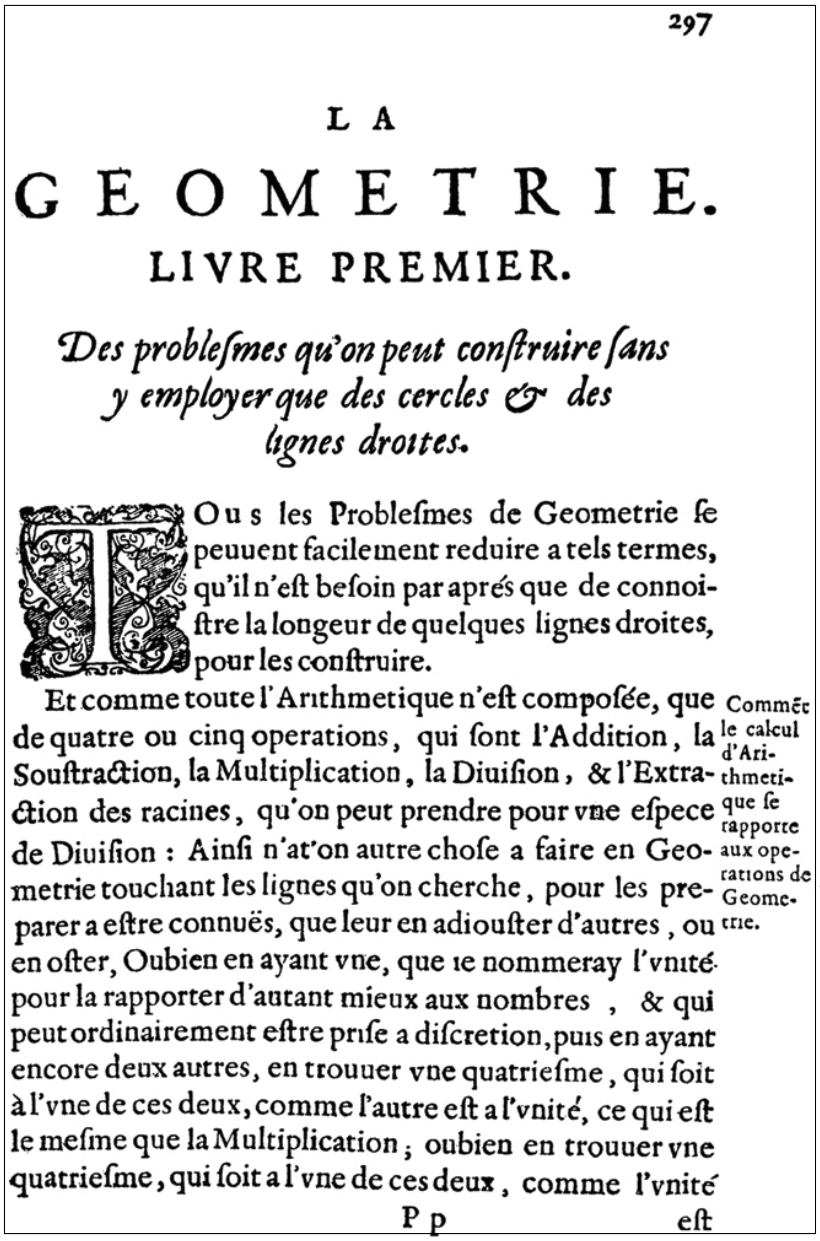
Hvis man skal finde et fjerde, som forholder sig til et af de to, ligesom enheden forholder sig til det andet, så er det det samme som division.

Hvis man skal finde en, to eller flere mellemproportionaler mellem enheden og nogle andre linjestykker, så er det det samme som uddragning af kvadratrod eller kubikrod osv.

Jeg er ikke bange for at indføre disse aritmetiske termer i geometrien for at gøre mig mere forståelig.




[38] Descartes bruger betegnelsen linje om såvel egentlige linjer som linjestykker. Her i oversættelsen har vi skelnet mellem disse begreber.



297

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

*Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.*

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commẽt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Pp est

*Descartes' afhandling om geometrien begynder på side 297, idet den var et appendiks til* Discours de la Methode. *Her ses første side.*

### Multiplikation

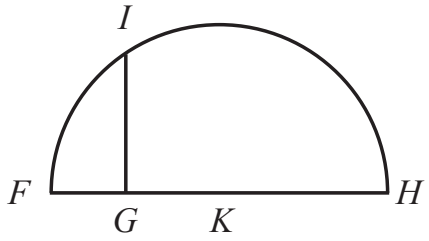
Lad f.eks. $AB$ være enheden; når jeg skal multiplicere $BD$ med $BC$, skal jeg blot forbinde punkterne $A$ og $C$ og dernæst trække $DE$ parallelt med $CA$. Da er $BE$ resultatet af multiplikationen.

### Division

Hvis $BE$ skal divideres med $BD$, forbinder jeg punkterne $E$ og $D$ og trækker $AC$ parallelt med $DE$. Da er $BC$ resultatet af denne division.

## Uddragning af kvadratrod

Hvis kvadratroden skal uddrages af $GH$, føjer jeg det rette linjestykke $FG$, som er enheden, til det og deler $FH$ i to lige store dele ved punkt $K$. Med centrum i $K$ tegner jeg cirklen $FIH$, oprejser derefter fra punkt $G$ en linje vinkelret på $FH$ til $I$. Da er $GI$ den søgte rod.




Her vil jeg ikke sige noget om kubik- eller andre rødder, da det er mere bekvemt at tale om dette senere.

## Brug af tal i geometrien

Ofte behøver man ikke at tegne linjestykkerne på papir, for det er tilstrækkeligt at tildele hvert af dem et bogstav. Når jeg skal addere linjestykkerne $BD$ og $GH$, kalder jeg det ene $a$ og det andet $b$, og jeg skriver $a + b$. På samme måde skriver jeg $a - b$ for at subtrahere $b$ fra $a$, og $ab$ for at multiplicere det ene med det andet, og $\frac{a}{b}$ for at dividere $a$ med $b$, og $aa$[39] eller $a^2$ for at multiplicere $a$ med sig selv, og $a^3$ for at multiplicere det endnu en gang med $a$ osv.

Jeg skriver $\sqrt{a^2 + b^2}$, når jeg skal uddrage kvadratroden af $a^2 + b^2$ og $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$ for at uddrage kubikroden[40] af $a^3 - b^3 + ab^2$ og tilsvarende for de andre roduddragninger.

Det skal bemærkes, at ved $a^2$ eller $b^3$ eller lignende forstår jeg almindeligvis helt simple linjestykker[41], skønt jeg benytter de navne, der er almindelige i algebraen, og kalder dem kvadrater og kuber, osv.

Det skal også bemærkes, at alle dele af en linje[42] altid skal have samme dimension, når enheden ikke er fastlagt i problemet. Således har $a^3$ samme dimension som $ab^2$ og $b^3$, og af disse dele er linjestykket, som jeg har kaldt $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$ sammensat. Men det er anderledes, når enheden er fastlagt, fordi den kan altid være underforstået, også dér hvor dimensionen er for stor eller for lille[43]. Skal man uddrage kubikroden af $a^2b^2 - b$, må man forestille sig, at størrelsen $a^2b^2$ er divideret én gang med enheden, og at den anden størrelse, $b$, er multipliceret to gange med enheden.[44]

[39] Descartes bruger i flæng betegnelser som $aa$ og $a^2$ og tilsvarende, lige som der optræder udtryk som $aabb$ og $a^2b^2$. I oversættelsen har vi fremover konsekvent anvendt potensskrivemåden. Ifølge Florian Cajori: *A History of Mathematical Notations* var Descartes blandt de første, der anvendte superscript til at markere en eksponent.

[40] Descartes bruger skrivemåden $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$ for kubikroden.

[41] Selvom $a^2$ har dimension af et areal, skal det altså her opfattes som længden af et linjestykke. Tilsvarende skal $b^3$ ikke opfattes som et rumfang. Se diskussionen side 24.

[42] Her menes ikke en geometrisk linje, men et sammensat algebraisk udtryk.

[43] Man kan kun addere og subtrahere størrelser med samme dimension. Da kubikroden af en radikand skal have dimensionen 1, må alle led i radikanden have dimensionen 3. Læs mere om dette side 24 og side 47.

[44] Descartes siger, at man kun kan addere og subtrahere størrelser af samme dimension. Da det er kubikroden, der skal uddrages, må alle led under rodtegnet have dimensionen 3.

$a + b$; Et $a - b$, pour ſouſtraire $b$ d'$a$; Et $ab$, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer $a$ par $b$; Et $aa$, ou $a^2$, pour multiplier $a$ par ſoy meſme; Et $a^3$, pour le multiplier encore vne fois par $a$, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\ a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 - b^3 + abb$, & ainſi des autres.

*Udsnit fra side 299 i* La Géométrie. *Bemærk Descartes' notation og datidens typografi.*

I øvrigt skal man for ikke at glemme navnene på linjestykkerne altid lave en separat liste, efterhånden som man giver eller ændrer navne, f.eks. kan man skrive

$AB = 1$,[45] dvs. $AB$ er lig 1

$GH = a$

$BD = b$, osv.

## Hvordan man kommer frem til de ligninger, der løser problemerne

Når man vil løse et problem, må man først betragte det, som om det allerede er løst og navngive alle de linjestykker, som synes at være nødvendige for konstruktionen, de ukendte såvel som de andre.[46] Uden at gøre forskel på de kendte og de ukendte linjestykker må man derefter nøje gennemgå problemet i den rækkefølge, som mest naturligt viser, hvordan de gensidigt afhænger af hinanden, indtil man kan udtrykke den samme størrelse på to måder. Det kaldes en ligning, thi leddene i den ene af de to måder er lig med leddene i den anden.

Man skal finde lige så mange af disse ligninger, som man har antaget, at der er ukendte linjestykker. Men hvis der ikke kan findes så mange, selv om man har gennemgået alt, så viser det, at problemet ikke er rigtigt afgrænset. I det tilfælde kan man vilkårligt vælge linjestykker af kendt længde for alle de ukendte, til hvilke der ikke svarer nogen ligning.

Hvis der herefter er flere tilbage, må man i rækkefølge gøre brug af hver af de ligninger, som også er tilbage, og enten betragte ligningen for sig selv eller sammenligne den med andre for at finde et udtryk for hver af de ukendte linjestykker. Således skal man gøre med dem, indtil der kun er én tilbage, som er lig med en anden, som er kendt, eller hvis 2., 3., 4.,

[45] Descartes skriver $AB \infty 1$; Ifølge Smith og Latham synes han at være den første, der har brugt dette symbol, som senere kun blev anvendt af få andre. Langt ind i 1700-tallet var det almindeligt at bruge æ eller oe fra det latinske ord *aequalis*. Symbolet = blev opfundet i 1557 af den walisiske matematiker Robert Recorde, der i sin bog *The Whetstone of Witte* skriver: "to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, of Gemowe (or twin) lines of one lengthe, thus: ===, bicause noe 2 thynges can be moare equalle."

[46] Bemærk i det følgende Descartes' brug af betegnelserne $a, b, c$, osv. for konstanter og $x$ og $y$ for ubekendte, som det er almindeligt i dag. Ifølge Florian Cajori: *A History of Mathematical Notations* var Descartes den første, der gjorde brug af denne notationskonvention.